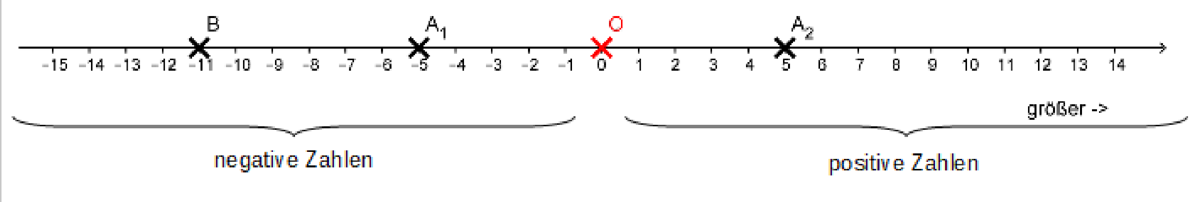
1 Zahlen

1.1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ **Menge der natürlichen Zahlen**
$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ **Menge der natürlichen Zahlen mit Null**
$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$ **Menge der ganzen Zahlen**

Die ganzen Zahlen kann man auf der **Zahlengeraden** darstellen.
Je weiter rechts auf der Zahlengerade eine Zahl steht, umso größer ist sie, z.B.: $-11 < -5$.
Die Entfernung einer Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden heißt **Betrag** der Zahl $|-5|$.
Z.B. haben die Zahlen -5 und 5 beide den Betrag 5: $|-5| = |5| = 5$.
Zwei Zahlen, die den gleichen Betrag, aber verschiedene Vorzeichen haben, heißen **Gegenzahlen**. Z.B. sind -5 und 5 Gegenzahlen.



Quadratzahlen: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; $8^2 = 64$; $9^2 = 81$; …
Primzahlen besitzen genau zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; …
Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig in ein Produkt von Primzahlen zerlegen.
Beispiel: (Primfaktorzerlegung) $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ (Potenzschreibweise)

1.2 Das Dezimalsystem

Unser Zahlensystem besteht aus den Ziffern 0 bis 9 (**Zehnersystem** oder **Dezimalsystem**) und ist ein **Stellenwertsystem**; die Stelle einer Ziffer bestimmt ihren Wert in der Zahl.
Zehnerpotenzen: $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$; …

Zehnerstufen	B	HMrd	ZMrd	Mrd	HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
Ziffer	4	1	2	7	8	3	4	3	5	2	1	9	8

1.3 Runden

Runden: Beim Runden (≈) einer Zahl auf Zehner, Hunderter, Tausender … wird statt dem genauen Wert die nächst gelegene Zehnerzahl, Hunderterzahl, Tausenderzahl angegeben. Entscheidend ist die Ziffer der Stelle hinter derjenigen, auf die gerundet wird. Bei den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 wird abgerundet, bei 5, 6, 7, 8 wird aufgerundet.

Zahl	auf Zehner	auf Hunderter	auf Tausender
56481	≈ 56480	≈ 56500	≈ 56000
72957	≈ 72960	≈ 73000*	≈ 73000

*Die nächst größere Hunderterzahl ist zugleich eine Tausenderzahl, deshalb sind 2 Stellen beim Aufrunden betroffen.

1.4 Termarten

Einen Rechenausdruck aus Zahlen, Rechenzeichen und ggf. Klammern nennt man **Term**.

Rechenart **Zugehöriger Term**

Addition:

Summe

4 + 3 = 7

1. Summand 2. Summand Wert der Summe

Subtraktion:

Differenz

4 - 3 = 1

Minuend Subtrahend Wert der Differenz

Multiplikation:

Produkt

4 · 3 = 12

1. Faktor 2. Faktor Wert des Produkts

Division:

Quotient

12 : 3 = 4

Dividend Divisor Wert des Quotienten

Potenz:

4 ist die Basis 3 ist der Exponent

4 · 4 · 4 = 4^3 = 64

drei Faktoren Potenz Wert der Potenz

1.5 Rechengesetze

Für alle a, b, c $\in \mathbb{Z}$ gilt:

Kommutativgesetze: $a + b = b + a$ (der Addition)
$a \cdot b = b \cdot a$ (der Multiplikation)

Assoziativgesetze: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (der Addition)
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (der Multiplikation)

Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
[Ausmultiplizieren (→) bzw. (←)Ausklammern]

Merke:

- Rechnungen in Klammern werden zuerst ausgeführt. Dabei beginnt man mit der innersten Klammer.
- "Punktrechnungen" (· , :) werden vor "Strichrechnungen" (+ , -) ausgeführt.
- Potenzrechnungen werden vor "Punktrechnungen" und vor "Strichrechnungen" ausgeführt.
- Der letzte Rechenschritt bestimmt die Art des Terms.
- Durch Null darf nicht dividiert werden!

$$
\begin{aligned}
& 10 + [200 - (161 - 7 \cdot 2^3)] : 5 \\
&= 10 + [200 - (161 - 7 \cdot 8)] : 5 \\
&= 10 + [200 - (161 - 56)] : 5 \\
&= 10 + [200 - 105] : 5 \\
&= 10 + 95 : 5 \\
&= 10 + 19 \\
&= 29 \qquad \textit{(Summe)}
\end{aligned}
$$

1.6 Rechnen mit ganzen Zahlen

Zwei Summanden mit **gleichem** Vorzeichen werden addiert, indem man die Beträge der Summanden addiert und das gemeinsame Vorzeichen beibehält.

$$(+2) + (+6) = 2 + 6 = +8$$
$$(-2) + (-6) = -2 - 6 = -8$$

Zwei Summanden mit **verschiedenen** Vorzeichen werden addiert, indem man die Beträge der beiden Summanden bildet und den kleineren Betrag vom größeren Betrag abzieht. Das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag wird als Vorzeichen für die Summe übernommen.

$$(+2) + (-6) = 2 - 6 = -4$$
$$(-2) + (+6) = -2 + 6 = +4$$

Zwei ganze Zahlen werden subtrahiert, indem man zum Minuenden die Gegenzahl des Subtrahenden addiert.

$$(+8) - (-3) = (+8) + (+3)$$

Zwei ganze Zahlen werden multipliziert (dividiert), indem man zuerst die Beträge multipliziert (dividiert) und dann das Vorzeichen bestimmt. Gleiche Vorzeichen ergeben positives, verschiedene Vorzeichen negatives Vorzeichen des Ergebnisses.

$$
\begin{aligned}
(+2) \cdot (+3) &= +6 \qquad & (+6) : (+3) &= +2 \\
(-2) \cdot (-3) &= +6 & (-6) : (-3) &= +2 \\
(+2) \cdot (-3) &= -6 & (+6) : (-3) &= -2 \\
(-2) \cdot (+3) &= -6 & (-6) : (+3) &= -2
\end{aligned}
$$

1.7 Lösen von Gleichungen

Zur Lösung einer Gleichung wird die geeignete Umkehraufgabe verwendet.
Der Platzhalter (□, x) steht für die gesuchte Zahl.

	Aufgabe	**Umkehraufgabe**
Addition	$x + 7 = 15$	$x = 15 - 7 = 8$
	$-9 + x = 24$	$x = 24 - (-9) = 33$
Subtraktion	$x - 7 = 22$	$x = 22 + 7 = 29$
	$3 - x = 16$	$x = 3 - 16 = -12$
Multiplikation	$x \cdot (-4) = 24$	$x = 24 : (-4) = -6$
	$8 \cdot x = -72$	$x = -72 : 8 = -9$
Division	$35 : x = -7$	$x = 35 : (-7) = -5$
	$x : (-6) = -10$	$x = (-10) \cdot (-6) = 60$

2 Größen

Eine **Größe** besteht aus einer **Maßzahl** und einer **Maßeinheit**: $\underbrace{3}_{Maßzahl} \quad \underbrace{km}_{Maßeinheit}$

2.1 Einheiten

Längeneinheiten:

Umrechnungszahl:		1000		10		10		10	
	km		m		dm		cm		mm

Flächeneinheiten:

km² ha a m² dm² cm² mm²

Die Umrechnungszahl ist immer 100.

Masseneinheiten:

t kg g mg

Die Umrechnungszahl ist immer 1000.

Geldeinheiten:

1 € = 100 ct

Zeiteinheiten:

1 d = 24 h 1 h = 60 min 1 min = 60 s

2.2 Dreisatz (Schlussrechnung)

12 Flaschen kosten 17,40 €.
1 Flasche kostet 1,45 €.
19 Flaschen kosten 27,55 €.

	12 Flaschen	≙ 17,40 €	
: 12	1 Flasche	≙ 17,40 € : 12 = 1,45 €	: 12
· 19	19 Flaschen	≙ 1,45 € · 19 = 27,55 €	· 19

2.3 Maßstab

Angabe eines Maßstabes Bild : Wirklichkeit

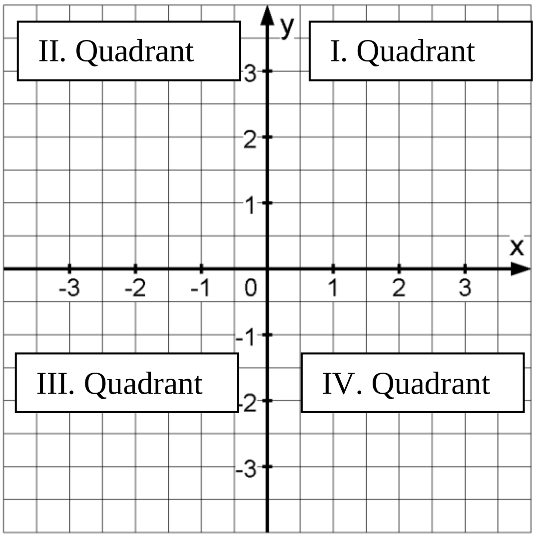
Beispiel:

a. Maßstab 1 : 5000
   2 cm im Bild entsprechen: $5000 \cdot 2\,cm = 10000\,cm = 100\,m$ in der Wirklichkeit.
   250 m in der Wirklichkeit entsprechen:
   $250\text{ m} : 5000 = 25000\text{ cm} : 5000 = 5\text{ cm}$ im Bild.
b. Maßstab 4 : 1 (Vergrößerung)
   8 cm im Bild entsprechen: $8\,cm : 4 = 2\,cm$ in der Wirklichkeit.
   60 mm in der Wirklichkeit entsprechen: $6\,mm \cdot 4 = 24\,mm = 2{,}4\,cm$ im Bild.
c. 3 cm im Bild sollen 300 km in der Wirklichkeit entsprechen.
   $300\,km : 3\,cm = 30.000.000\,cm : 300\,cm = 100.000$
   Der geeignete Maßstab ist 1 : 100.000.

3 Geometrie

3.1 Das Koordinatensystem

Die waagrechte Achse heißt **x-Achse**, die senkrechte Achse **y-Achse**. Ihr gemeinsamer Nullpunkt heißt **Ursprung**.
Ein Punkt **P(x | y)** ist durch seine **Koordinaten** festgelegt.

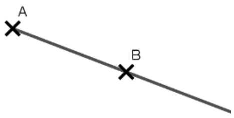


3.2 Geometrische Grundbegriffe

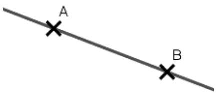
Strecke $\overline{AB}$

$|\overline{AB}|$ ist die **Länge der Strecke $\overline{AB}$** .
Der **Abstand der Punkte A und B** zueinander ist die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

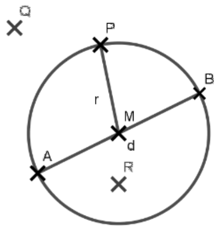
Halbgerade [AB



Gerade AB



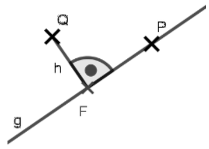
Kreis k(M;r) mit Mittelpunkt M und Radius r. Die Strecke $\overline{MP}$ nennt man **Radius** des Kreises. Alle Punkte des Kreises haben den gleichen Abstand r zum Mittelpunkt M ($|\overline{PM}| = r$).
Für den **Durchmesser d** (hier z.B. $\overline{AB}$) eines Kreises mit Radius r gilt:
$\boldsymbol{d = 2 \cdot r}$
Punkte, die nicht zum Kreis gehören, liegen entweder im Innern des Kreises ($R,\ mit\ |\overline{RM}| < r$) oder außerhalb des Kreises ($Q, mit\ \ |\overline{QM}| > r$).



3.3 Lagebeziehungen

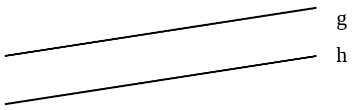
3.3.1 Punkte

Der Punkt P liegt auf der Geraden g ($P \in g$). Der Punkt Q liegt nicht auf der Geraden g ($Q \notin g$).
Der Abstand des Punktes Q zur Geraden g ist die Länge der senkrechten Verbindungsstrecke $\overline{QF}$ von Q bis g (Lotstrecke).

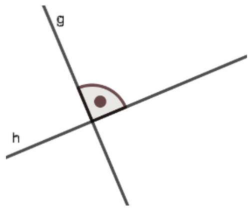


3.3.2 Zwei Geraden zueinander

Die Geraden g und h sind zueinander **parallel**, $g \parallel h$



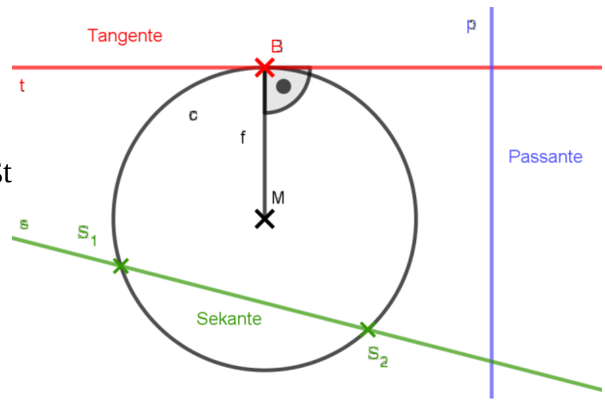
Die Geraden g und h stehen aufeinander **senkrecht**, g ist **Lot** zu h, $g \perp h$.



3.3.3 Kreis und Gerade

Eine Gerade kann

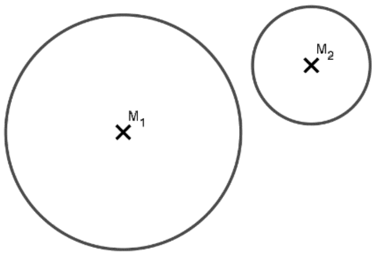
a. genau einen Punkt mit einem Kreis gemeinsam haben (hier t), sie berührt den Kreis im Punkt B. Sie heißt dann Tangente. Der Radius $\overline{MB}$ ist senkrecht zu t.
b. den Kreis in 2 Punkten schneiden (hier s), sie heißt dann Sekante.
c. keinen Punkt mit dem Kreis gemeinsam haben (hier p). Sie heißt dann Passante.

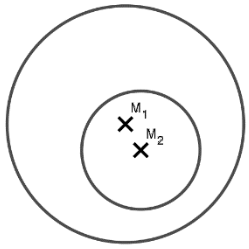


3.3.4 Zwei Kreise zueinander

2 Kreise können

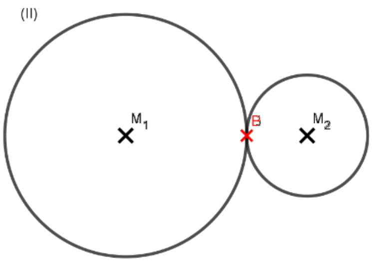
(I) keine gemeinsamen Punkte haben:

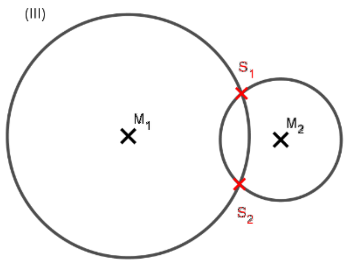




(II) genau einen Schnittpunkt. Sie berühren sich dann.

(III) zwei gemeinsame Schnittpunkte haben.

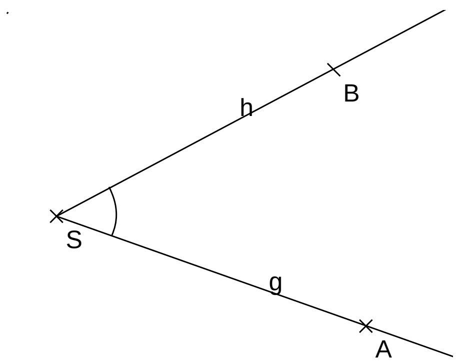




(IV) Sind sie gleich groß, können sie auch übereinander liegen. Dann haben sie alle Punkte gemeinsam.

3.4 Winkel

Dreht man eine Halbgerade g um ihren Anfangspunkt S entgegen dem Uhrzeigersinn bis zur Halbgeraden h, so wird ein Bereich überstrichen, den wir Winkel zwischen g und h nennen.



Bezeichnungen:

$\sphericalangle$ (g,h) oder

$\sphericalangle$ ASB oder

mit kleinen griechischen Buchstaben:

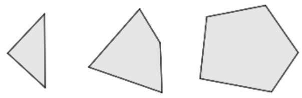
α , β , γ, δ , ε ...

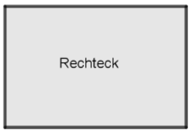
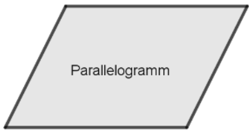
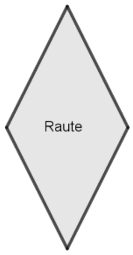
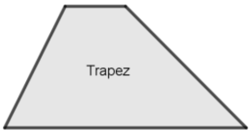
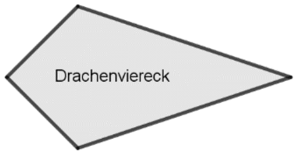
Winkelarten:

$0^o < \alpha < 90^o$	spitzer Winkel	$\alpha = 90^o$	rechter Winkel
$90^o < \alpha < 180^o$	stumpfer Winkel	$\alpha = 180^o$	gestreckter Winkel
$180^o < \alpha < 360^o$	überstumpfer Winkel	$\alpha = 360^o$	Vollwinkel

3.5 Geometrische Figuren

Figuren sind ebene Gebilde.
Geradlinig begrenzte Flächenstücke werden als **Vielecke** bezeichnet. Je nach Anzahl ihrer Eckpunkte nennt man sie **Dreieck**, **Viereck**, **Fünfeck** usw.

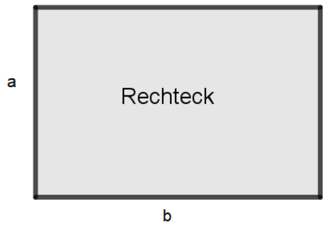


Ein Viereck mit 4 rechten Winkeln (90°) heißt **Rechteck**. 	Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt **Quadrat**. 
Ein Viereck, bei dem die gegenüber-liegenden Seiten parallel sind, heißt **Parallelogramm**. 	Ein Viereck mit 4 gleich langen Seiten heißt **Raute**. 
Ein Viereck, bei dem 2 Seiten parallel sind, heißt **Trapez**. 	Ein Viereck mit 2 Paaren **benachbarter**, gleichlanger Seiten, heißt Drachenviereck. 

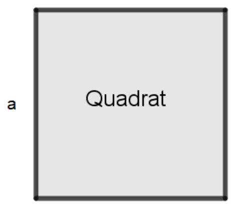
3.5 Umfang und Flächeninhalt von Rechteck und Quadrat

Umfang des Rechtecks:
$U_{Rechteck} = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$

Flächeninhalt des Rechtecks:
$A_{Rechteck} = a \cdot b$



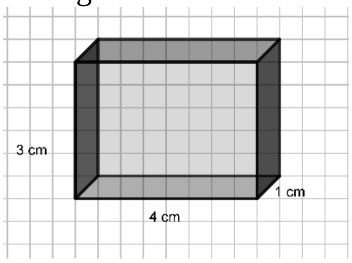
Für ein **Quadrat mit der Seitenlänge a** gilt entsprechend:
$U_{Quadrat} = 4 \cdot a$
$A_{Rechteck} = a \cdot a = \ a^2$



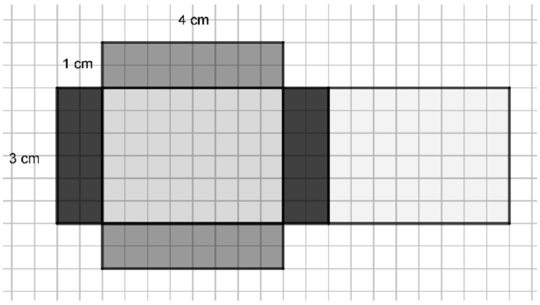
3.6 Oberfläche eines Quaders

Ein Quader kann Kanten 3 verschiedener Längen haben:
Beispiel: $a = 4\ cm, b = 3\ cm, c = 1\ cm.$
Wenn man die Seitenflächen eines Quaders in einer Ebene ausbreitet, erhält man sein **Netz**.
Es besteht aus 6 Rechtecken, die paarweise flächengleich sind.

Schrägbild:



Netz:



Der Flächeninhalt des Quadernetzes ist der **Oberflächeninhalt des Quaders** :

$$O_{Quader} = \underbrace{2 \cdot a \cdot b}_{Vorder-/Rückseite} + \underbrace{2 \cdot b \cdot c}_{Seitenflächen} + \underbrace{2 \cdot c \cdot a}_{Grund-/Deckfläche}$$
$$= 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$$

Im Beispiel:

$O_{Quader} = 2 \cdot (4\ cm \cdot 3\ cm + 3\ cm \cdot 1cm + 4\ cm \cdot 1\ cm)$
$= 2 \cdot (12\ cm^2 + 3\ \ cm^2 + 4\ \ cm^2)$
$= 2 \cdot 19\ \ cm^2$
$= 38\ \ cm^2$

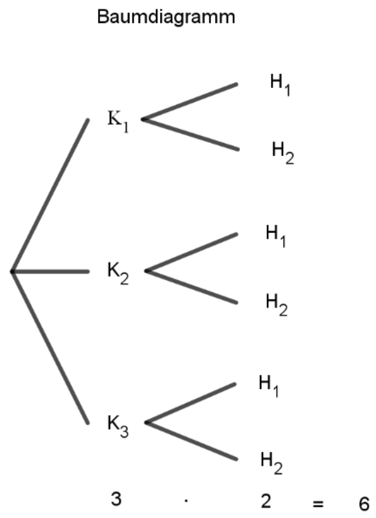
Speziell gilt für den **Oberflächeninhalt eines Würfels** mit der Kantenlänge a:

$O_{Würfel} = 6 \cdot a^2$

4 Kombinatorik

Zählprinzip

Beispiel:
Sophie möchte sich verkleiden. Sie hat drei Kleider und zwei alte Hüte gefunden. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie sich damit verkleiden?



Jeder Pfad im **Baumdiagramm** steht für eine Kombinationsmöglichkeit.
Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ergibt sich aus der Anzahl der Baumenden (6).

Nach dem **Zählprinzip** erhält man die Gesamtzahl der Möglichkeiten als Produkt aus der Anzahl der Möglichkeiten auf jeder Stufe: $3 \cdot 2 = 6$

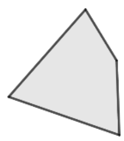
5 Grundlegende Strategien zum Lösen von Aufgaben

5.1 Gegenbeispiele

Falsche, allgemeingültige Aussagen können gut widerlegt werden, indem man ein konkretes Gegenbeispiel angibt.

Beispiel:
"Alle Vierecke sind Trapeze."

Gegenbeispiel:
Die Aussage ist falsch, denn diese Figur ist ein Viereck, aber kein Trapez.



5.2 Systematisches Aufschreiben / Probieren

Sollen alle Möglichkeiten angegeben werden, findet man sie gut durch systematisches Probieren bzw. Aufschreiben. Das Baumdiagramm dabei eine mögliche Darstellungsform.

Beispiel: Gib alle genau dreistelligen Zahlen mit der Quersumme 3 an.

Eine dreistellige Zahl hat die Quersumme 3, wenn
- nur die Ziffer 1 vorkommt: 111.
- die Ziffer 2, die Ziffer 1 und die Ziffer 0 vorkommen: 102, 120, 201, 210.
  [Hier sind Zahlen in aufsteigender Reihenfolge notiert, die Ziffern werden dadurch systematisch getauscht.]
- die Ziffer 3 und sonst die Ziffer 0 vorkommen: 300.

5.3 Strategien für Sachaufgaben

Beispiel 1:
"Bei einer Allee sollen im Abstand von 50 m an einer Seite Bäume gepflanzt werden. Dabei beträgt der Abstand vom ersten zum letzten Baum 2 km.
Berechne die Anzahl der benötigten Bäume."

Das **Veranschaulichen** durch Skizzen hilft bei vielen Sachaufgaben.

Die Skizze verdeutlicht, dass es einen Baum mehr als Abstände zwischen den Bäumen gibt.

Zerlegen des Problems in Teilprobleme:
Anzahl der Abstände: $2\ km : 50\ m = 2000\ m : 50\ m = 40$
Anzahl der Bäume: $40 + 1 = 41$

Es werden 41 Bäume benötigt.

Beispiel 2:
Ein Rechenspiel: " Denke Dir eine Zahl. Multipliziere sie mit 5. Multipliziere sie mit 20. Teile sie durch 10.
Nenne das Ergebnis und ich sage dir deine Ausgangszahl."
Das Ergebnis ist zum Beispiel 70.

Vorwärtsrechnen: $x \cdot 5 \cdot 20 : 10 = x \cdot (5 \cdot 20 : 10) = x \cdot (100 : 10) = x \cdot 10$
Die Ausgangszahl wird also insgesamt mal 10 genommen.

Finden der gesuchten Zahl durch **Rückwärtsrechnen** (Umkehraufgabe):
Das Ergebnis wird durch 10 geteilt, um die Ausgangszahl zu erhalten: $70 : 10 = 7$

Die ursprüngliche Zahl war 7.