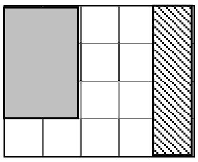
1 Zahlen

1.1 Brüche

1.1.1 Bruchteile und Bruchzahlen

Ein Bruchteil vom Ganzen lässt sich mit Hilfe von **Bruchzahlen** darstellen.

Bsp.:



Ganzes: 20 Kästchen

6 graue Kästchen, also: $\frac{6}{20}$

4 schraffierte Kästchen, also: $\frac{4}{20}$

Bruchteile gibt man häufig in **Prozent** (%) an, dabei gilt: $1\% = \frac{1}{100}$

Bsp.: $3\% = \frac{3}{100}$

Brüche haben die Form $\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$; ***Bsp.:*** $\frac{3}{4}$ Zähler, Bruchstrich, Nenner

z heißt **Zähler**, n heißt **Nenner** des Bruches.

Es gilt: $\boxed{\frac{z}{n} = z : n}$

Einteilung der Brüche:	Stammbrüche	$z = 1$
	echte Brüche	$z < n$
	unechte Brüche	$z > n$
	Scheinbrüche	$z = 0$ oder z ist ein Vielfaches von n

Unechte Brüche lassen sich in **gemischte Zahlen** verwandeln. ***Bsp.:*** $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

1.1.2 Formänderung von Brüchen

Erweitern eines Bruches bedeutet, Zähler und Nenner werden mit der <u>selben</u> natürlichen Zahl k multipliziert: $\frac{z}{n} = \frac{z \cdot k}{n \cdot k}$, $k \in \mathbb{N}$ ***Bsp.:*** $\frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{6}{20}$ oder $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$

Kürzen eines Bruches bedeutet, Zähler und Nenner werden durch einen <u>gemeinsamen</u> Teiler k dividiert:: $\frac{z}{n} = \frac{z : k}{n : k}$, $k \in \mathbb{N}$ ***Bsp.:*** $\frac{6}{20} = \frac{6 : 2}{20 : 2} = \frac{3}{10}$ oder $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Einen Bruch, den man nicht mehr kürzen kann, nennt man **vollständig gekürzt (Grundform).**

1.1.3 Addieren und Subtrahieren

Brüche mit **gleichem** Nenner werden addiert (subtrahiert), indem man **die Zähler addiert** (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

Bsp.:

$$\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$$

Brüche mit **verschiedenen** Nennern erweitert man vor dem Addieren (Subtrahieren) auf den **Hauptnenner** (kleinstes gemeinsames Vielfaches: **kgV**).

Bsp.:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}$$

$$=\frac{5}{12}$$

1.1.4 Multiplizieren und Dividieren

Brüche werden **multipliziert**, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Bsp.:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{20}=\frac{5\cdot 9}{6\cdot 20}$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$$

$$=\frac{3}{8}$$

Für die Division zweier Brüche gilt:

Bruch : Bruch = Bruch • Kehrbruch

$$\frac{z_1}{n_1}:\frac{z_2}{n_2}=\frac{z_1\cdot n_2}{n_1\cdot z_2}$$

Bsp.:

$$\frac{9}{10}:\frac{6}{25}=\frac{9\cdot 25}{10\cdot 6}$$

$$=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 2}$$

Beachte:

- Gemischte Zahlen müssen **vor** dem Multiplizieren und **vor** dem Dividieren in unechte Brüche verwandelt werden.
- Produkte im Zähler und Nenner werden vor dem Multiplizieren stets vollständig gekürzt.

1.1.5 Bruchteil eines Bruchs

Das Wort „von“ wird nach einem Bruch durch „**•**“ ersetzt.

Bsp.:

$$\frac{3}{4}\,von\,\frac{2}{5}\,kg=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\,kg$$

$$=\frac{3\cdot 1}{2\cdot 5}\,kg$$

$$=\frac{3}{10}\,kg$$

1.2 Dezimalzahlen

Zahlen wie z.B. 2,531 heißen **Dezimalzahlen**. Dabei bedeutet die 1. (2. , 3. ,...) Stelle hinter dem Komma Zehntel (Hundertstel, Tausendstel, ...).

Die Ziffern hinter dem Komma heißen Dezimalen.

Bsp.: $0{,}07 = \frac{7}{100}$ $\qquad$ $2{,}531 = 2\frac{531}{1000}$

1.2.1 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

Die Addition und Subtraktion erfolgt stellenweise von „rechts“ beginnend.

Bsp.: $4{,}72 + 3{,}204 = 7{,}924$

$$\begin{array}{r} 4{,}72 \\ \underline{+3{,}204} \\ 7{,}924 \end{array}$$

1.2.2 Multiplikation und Division mit Stufenzahlen

Man verschiebt das Komma um so viele Stellen nach rechts (links) wie die Stufenzahl (Zehnerpotenz) Nullen hat.

Bsp.: $3{,}41 \cdot 1000 = 3410$

$3{,}41 : 100 = 0{,}0341$

1.2.3 Multiplikation von Dezimalbrüchen

Man multipliziert zunächst ohne Berücksichtigung des Kommas.

Das Ergebnis erhält so viele Dezimalen, wie die Faktoren zusammen haben.

Bsp.: $2{,}74 \cdot 3{,}2 = 8{,}768$

NR:
$$\begin{array}{r} \underline{274 \cdot 32} \\ 822 \\ \underline{548} \\ 8768 \end{array}$$

1.2.4 Division durch einen Dezimalbruch

Zunächst wird das Komma im Dividenden und im Divisor um **gleich viele Stellen** nach rechts verschoben, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist; dann dividieren.
Beim Überschreiten des Kommas des Dividenden wird im Quotientenwert das Komma gesetzt.

Bsp.: *14,36 : 0,8 =143,6 : 8*

1.2.5 Umformen gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche

Die Division $\frac{z}{n}$ = z : n ergibt

- einen **endlichen** Dezimalbruch, wenn der Nenner des vollständig gekürzten Bruches nur die Primfaktoren 2 oder 5 (oder beide) enthält.
- einen **unendlichen periodischen** Dezimalbruch sonst.

1.3 Die Zahlenmenge *Q*

Die Menge der positiven und negativen Bruchzahlen sowie die positiven und negativen Dezimalzahlen bilden zusammen mit der Zahl 0 die Menge der rationalen Zahlen **Q** .

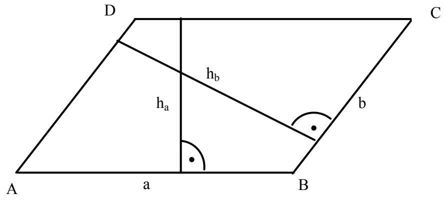
1.4 Rechnen mit rationalen Zahlen

Die Rechengesetze und –regeln der ganzen Zahlen ***Z*** gelten auch für die rationalen Zahlen ***Q***.

2 Geometrie

2.1 Flächeninhalte

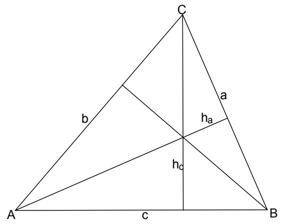
Parallelogramm:



$\mathbf{A_P} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

allg.:
$\mathbf{A_P} = g \cdot h$ mit g = Grundlinie und
h = zugehörige Höhe

Dreieck:

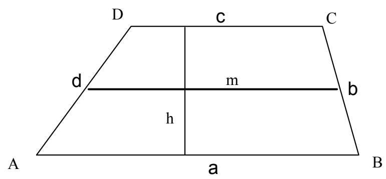


$$A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

allg.:

$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ mit
g = Grundlinie und
h = zugehörige Höhe

Trapez:



$$A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

allg.:

$A_T =$ m · h mit
m = Mittellinie und
h = Höhe

2.2 Volumenberechnung

Volumen eines **Quaders** mit den Kantenlängen l, b, h: $V = l \cdot b \cdot h$

Volumen eines **Würfels** mit der Kantenlänge s: $V = s \cdot s \cdot s = s^3$

Volumeneinheiten:

Kantenlänge des Würfels	Volumen des Würfels
1 mm	1 mm^3
1 cm	1 cm^3
1 dm	1 dm^3
1 m	1 m^3

wichtig:

1 dm^3 = 1 Liter

Die Umrechnungszahl ist jeweils 1000.

3 Anwendungen im Alltag

3.1 Direkte Proportionalität

Bei einer direkten Proportionalität wird dem doppelten, dreifachen, vierfachen ... Wert der einen Größe der doppelte, dreifache, vierfache ... Wert der anderen Größe zugeordnet.

Bsp.: *2 Äpfel kosten 0,75€*

4 Äpfel kosten 1,50€

Dreisatz (Schlussrechnung)

Bsp: *6 kg Äpfel kosten 4,50 €. Wie viel kosten 15 kg?*

1.	*6 kg*	*kosten*	*4,50 €*
2.	*1 kg*	*kostet*	*4,50 € : 6 = 0,75 €*
3.	*15 kg*	*kosten*	*0,75 € · 15 = 11,25 €*

3.2 Prozentrechung

Es gilt: $\boxed{\text{p \% von G = P}}$

p % = **Prozentsatz**, G = **Grundwert**, P = **Prozentwert**

Berechnung des Prozentsatzes: $p\% = \dfrac{P}{G}$

Bsp: *Wie viel Prozent sind 40 € von 320 €?*

$$p\% = \frac{40\,€}{320\,€} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

Berechnung des Prozentwertes: $P = p\% \cdot G$

Bsp: *Der Preis eines Fernsehgerätes beträgt 325 €. Er wird um 12% gesenkt.*

Wie hoch ist der Preisnachlass?

$P = 12\%$ *von* $325\,€ = 0{,}12 \cdot 325\,€ = 39\,€$

Berechnung des Grundwertes: $G = \dfrac{P}{p\%}$

Bsp: *Der Preis eines Fernsehgerätes wurde um 15% gesenkt und beträgt nun 357 €.*
Wie teuer war das Gerät vorher?
*(Lösung mit **Dreisatz**)*

1.	*85%*	entsprechen	*357 €*
2.	*1%*	entspricht	*357 € : 85 = 4,20 €*
3.	*100%*	entsprechen	*4,20 € · 100 = 420 €*

oder: $G = \dfrac{357\,€}{0{,}85} = 420\,€$

Auch die Berechnung des Prozentsatzes und des Prozentwertes kann man mit dem Dreisatz lösen.

Bei allen Prozentrechnungen handelt es sich um eine direkte Proportionalität.

Dem Grundwert werden immer 100% zugeordnet.

4 Stochastik

4.1 Zufallsexperimente

Experimente, die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind und deren Ergebnis zufällig, also nicht vorhersagbar ist, nenn man **Zufallsexperimente**.

Bsp: *Werfen eines Spielwürfels, einer Münze; Drehen eines Glückrades*

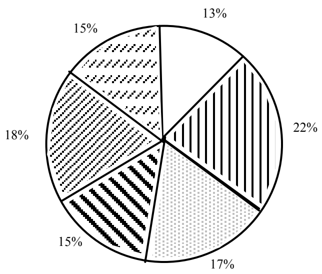
4.2 Relative Häufigkeit

Bsp: *Wirft man einen Spielwürfel 60 mal und tritt dabei die Augenzahl zwei 13 mal auf, so sagt man die* ***absolute Häufigkeit*** *der „Augenzahl zwei" ist 13 und die* ***relative Häufigkeit*** *ist* $\frac{13}{60}$.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$$

Die Auswertung von Zufallsexperimenten erfolgt häufig in Tabellen oder Diagrammen.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	Summe
absolute Häufigkeit	8	13	10	9	11	9	60
relative Häufigkeit	$\frac{8}{60} \approx 13\%$	$\frac{13}{60} \approx 22\%$	$\frac{10}{60} \approx 17\%$	$\frac{9}{60} = 15\%$	$\frac{11}{60} \approx 18\%$	$\frac{9}{60} = 15\%$	$\frac{60}{60} = 100\%$
Winkel im Diagramm	48°	78°	60°	54°	66°	54°	360°



Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Wiederholt man ein Zufallsexperiment sehr oft, so pendelt sich die relative Häufigkeit bei einem festen Zahlenwert ein.

Beispiel: Beim Werfen eines Spielwürfels ist dieser Wert $\frac{1}{6}$.

Bemerkung: Die Zusammenstellung des Grundwissens Mathematik basiert auf dem Grundwissenskatalog der Fachschaft des Gymnasiums Oberhaching, bei der wir uns für die Hilfe herzlich bedanken.